

Математика.

Уважаемые студенты!

Вам необходимо выполнить следующее:

1. **Конспект.** Оформить в тетради. Выделить главное, записать аккуратно.
2. **Самостоятельная работа.** Решить задания по теме. Записать подробное решение и ответ.
3. **Домашняя работа.** Выполнить задания для домашней работы. Оформить с пояснениями.

Требования к оформлению:

Дата, тема, подробные решения, выделенные ответы, аккуратность.

Домашнее задание

необходимо отправить по ссылке:

<https://forms.yandex.ru/u/6aa9f646eb6146868c0f0d6e>

или перейти по QR-коду.



СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТ

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Решение системы — пара чисел $(x; y)$, обращающая каждое уравнение в верное равенство.

2. Метод подстановки

Алгоритм:

- Из одного уравнения выразить одну переменную через другую.
- Подставить во второе уравнение.
- Решить полученное уравнение с одной переменной.
- Найти вторую переменную.

Пример:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ -(7 - y) + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ -7 + y + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ 3y = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{ответ: (3;4)}$$

Ответ: (3; 4).

Решить самостоятельно:

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{Ответ: (5; 1)}$$

3. Метод алгебраического сложения

Алгоритм:

- Умножить уравнения на числа так, чтобы коэффициенты при одной переменной стали противоположными.
- Сложить уравнения.
- Решить уравнение с одной переменной.
- Найти вторую переменную.

Пример:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 6/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases} \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5, \text{ подставляем в уравнение и получаем} \\ 5 - y = 6 \Rightarrow y = -1 \quad \text{ответ: } (5; -1)$$

Решить самостоятельно:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x - 3y = 2; \end{cases} \text{ Ответ: } \left(3; \frac{1}{3}\right)$$

4. Матричная форма записи

Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

записывается в виде:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Если $\det A \neq 0$, то:

$$X = A^{-1}B.$$

5. Метод Крамера (определители)

Формулы Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

Где:

Главный определитель системы Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определитель для переменной x — Δ_x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

Определитель для переменной y — Δ_y

Заменяем второй столбец (коэффициенты при y) на столбец свободных членов:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Пример:

$$\begin{cases} 2x + 11y = 15 \\ 10x - 11y = 9 \end{cases} \text{ Ответ: } (2; 1)$$

Решение

1. Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 10 & -11 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-11) - 11 \cdot 10 = -22 - 110 = -132.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение.

2. Определитель для x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & 11 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} = 15 \cdot (-11) - 11 \cdot 9 = -165 - 99 = -264.$$

3. Определитель для y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 15 \cdot 10 = 18 - 150 = -132.$$

4. Находим x и y :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-264}{-132} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-132}{-132} = 1.$$

$$\boxed{x = 2, y = 1}$$

Ответ: (2; 1).

Решить самостоятельно:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 21, \\ 4x - 3y = 11 \end{cases} \quad \text{Ответ: (5; 3)}$$

6. Графический метод

Пример:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Выразим y через x в каждом уравнении

Из первого уравнения:

$$y = 5 - x$$

Из второго уравнения:

$$y = x - 1$$

Составим таблицы значений для каждой прямой

Для $y = 5 - x$:

x	0	5
y	5	0

Для $y = x - 1$:

x	0	1	3
y	-1	0	2

Строим прямые $y = -x + 5$ и $y = x - 1$.

Точка пересечения (3; 2).

Ответ: (3; 2).

7. Система двух линейных уравнений с тремя переменными

Система двух линейных уравнений с тремя переменными

Имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

Решением называется упорядоченная тройка чисел (x, y, z) , которая обращает оба уравнения в верные равенства.

Геометрически каждое уравнение задаёт плоскость. Две плоскости могут пересекаться по прямой — тогда решений бесконечно много; быть параллельными — решений нет; совпадать — тоже бесконечно много решений.

Для решения обычно выражают одну переменную через две другие и вводят параметр.

2. Система трёх линейных уравнений с тремя переменными

Общий вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Для таких систем применяются формулы Крамера.

3. Определители третьего порядка

Правило перемножения чисел в определителе третьего порядка называется **правилом Саррюса** (или правилом треугольников). Оно позволяет быстро запомнить, какие элементы на какие умножать.

Обозначим элементы матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Тогда определитель вычисляется по формуле:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера

Для трёх переменных:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Если $\Delta=0$, то решений нет

Пример:

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 1, \\ 2x + 3z = -2, \\ 4x - 5y = 3. \end{cases}$$

Запишем её в стандартном виде, добавив нулевые коэффициенты:

$$\begin{cases} 3x + 1y + 3z = 1, \\ 2x + 0y + 3z = -2, \\ 4x - 5y + 0z = 3. \end{cases}$$

Основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем по правилу треугольников:

$$\begin{aligned}\Delta &= 3 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 0 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot (-5) - 1 \cdot 2 \cdot 0 \\ &= 0 + 12 - 30 - 0 + 45 - 0 = 27.\end{aligned}$$

$$\Delta = 27 \neq 0.$$

Значит, система имеет единственное решение.

Вспомогательные определители

Определитель Δ_x — заменяем первый столбец на свободные члены 1, -2, 3:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-5) - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) \cdot 0 \\ &= 0 + 9 + 30 - 0 + 15 - 0 = 54.\end{aligned}$$

$$\Delta_x = 54.$$

Определитель Δ_y — заменяем второй столбец:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}\Delta_y &= 3 \cdot (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 0 \\ &= 0 + 12 + 18 + 24 - 27 - 0 = 27.\end{aligned}$$

$$\Delta_y = 27.$$

Определитель Δ_z — заменяем третий столбец:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}\Delta_z &= 3 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 0 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) \cdot (-5) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 0 - 8 - 10 - 0 - 30 - 6 = -54.\end{aligned}$$

$$\Delta_z = -54.$$

Формулы Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2.$$

Ответ $x=2, y=1, z=-2$

Решить самостоятельно:

$$\begin{cases} 6a + 9b + 2c = 3, \\ 4a + 5b - 3c = 5, \\ 3a + 4b + c = 3. \end{cases}$$

8. Домашнее задание

Решить системы:

1. $\begin{cases} 5x - 7y = 3, \\ 6x + 5y = 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - y - 13 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + y - 2z = -4, \\ 2x - 2y - z = -6, \\ x + 3y + 2z = 12. \end{cases}$