

Математика.

Уважаемые студенты!

Вам необходимо выполнить следующее:

1. **Конспект.** Оформить в тетради. Выделить главное, записать аккуратно.
2. **Самостоятельная работа.** Решить задания по теме. Записать подробное решение и ответ.
3. **Домашняя работа.** Выполнить задания для домашней работы. Оформить с пояснениями.

Требования к оформлению:

Дата, тема, подробные решения, выделенные ответы, аккуратность.

Домашнее задание

необходимо отправить по ссылке:

<https://forms.yandex.ru/u/6aa9f646eb6146868c0f0d6e>

или перейти по QR-коду.



17.09.2026

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — действительные числа и $a \neq 0$, называется **квадратным**.

Формулы корней

Дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac$$

Корни:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Количество корней

Значение D	Количество корней
$D < 0$	Нет действительных корней
$D = 0$	Два равных корня (один корень)
$D > 0$	Два различных корня

Теорема Виета

Для приведённого квадратного уравнения ($a = 1$):

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c$$

Неполные квадратные уравнения

1 вид. Если $c = 0$:

$$ax^2 + bx = 0$$

Решение: выносим x за скобки:

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ или } x = -\frac{b}{a}$$

Пример:

$$2x^2 - 30x = 0;$$

$$x(2x - 30) = 0;$$

$$x = 0, \text{ или } 2x - 30 = 0;$$

$$2x = 30;$$

$$x = 15.$$

Ответ: $x = 0$; $x = 15$.

2 вид. Если $b = 0$:

$$ax^2 + c = 0$$

Решение:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \left(\text{при } -\frac{c}{a} \geq 0 \right)$$

Пример:

$$4x^2 - 100 = 0;$$

$$4x^2 = 100 \quad | : 4$$

$$x^2 = 25;$$

$$|x| = \sqrt{25};$$

из этого следует, что $x = 5$ или $x = -5$.

Ответ: $x_1 = 5$; $x_2 = -5$.

Пример:

$$x^2 + 36 = 0;$$

$$x^2 = -36.$$

У уравнения нет решения, т. к. квадратный корень из отрицательного числа не имеет смысла (также известно, что число во второй степени не может быть отрицательным).

Решить самостоятельно:

1. $(x - 3)(x - 2) = 6(x - 3)$

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$

Через Теореме Виета

3. $x^2 - 7x + 12 = 0$

4. $x^2 + 2x - 15 = 0$

СПОСОБЫ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Теория:

Выражение можно разложить на множители различными способами:

- вынесение общего множителя за скобки;
- использование формул сокращённого умножения;
- способ группировки;
- использование корней квадратного уравнения.

Способ группировки

Используется, когда в выражении имеются четыре, шесть, восемь и т. д. слагаемых.

Соединяются в группы те слагаемые, у которых имеется общий множитель.

$2x - 2y - fx + fy =$	У двух первых слагаемых общий множитель 2 , а у третьего и четвёртого — (-f) .
$= 2(x - y) - f(x - y) =$	Знак (-) нужно вынести перед скобками, т. к. обе полученные скобки должны быть равны, в противном случае выражение нельзя разложить на множители данным способом.
$= (x - y)(2 - f)$	Общий множитель (x - y) выносим за скобки

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Способ подходит для полных и неполных квадратных трёхчленов.

Алгоритм:

Находятся корни квадратного трёхчлена x_1 и x_2 .

Используется формула:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Пример:

разложи на множители квадратный трёхчлен:

$$z^2 - 4z + 3;$$

$$1) z^2 - 4z + 3 = 0; \text{ корни } z_1 = 1, z_2 = 3;$$

$$2) z^2 - 4z + 3 = (z - 1)(z - 3).$$

Разложи на множители выражение:

$$3x^4 - 2x^2 - 1;$$

$$x^2 = a;$$

$$3a^2 - 2a - 1 = 0; \text{ корни } a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{3};$$

$$3a^2 - 2a - 1 = 3(a - 1)\left(a + \frac{1}{3}\right);$$

$$3x^4 - 2x^2 - 1 = 3\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = 3(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + \frac{1}{3}\right).$$

УПРОЩЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Теория

Ранее рассматривались различные действия с алгебраическими дробями: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень — когда выполнялось всего одно действие.

Теперь рассмотрим упрощение более сложных рациональных выражений, т. е. выражений, в которых с алгебраическими дробями нужно выполнить несколько различных действий.

Правила упрощения

Чтобы правильно упростить такие выражения, необходимо:

- **соблюдать порядок действий** (сначала выполнять действия в скобках, затем умножение/деление, потом сложение/вычитание);
- **соблюдать правила выполнения этих действий** (приводить к общему знаменателю, сокращать дроби, применять формулы сокращённого умножения);
- **помнить, что все действия осуществляются только для тех значений переменных, при которых дробь имеет смысл** (знаменатель не должен обращаться в нуль).

Пример:

выполни действия $\frac{x-y}{6y} : \frac{x^2-y^2}{y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{x}$.

Решение: данное задание можно выполнить двумя способами.

Первый способ

Упрощение выполняется в два действия — сначала деление, а потом умножение, числители и знаменатели раскладываются на множители в каждом действии.

$$1) \frac{x-y}{6y} : \frac{x^2-y^2}{y} = \frac{x-y}{6y} \cdot \frac{y}{x^2-y^2} = \frac{\cancel{(x-y)} \cdot \cancel{y}}{6 \cancel{y} \cdot (x+y) \cancel{(x-y)}} = \frac{1}{6(x+y)};$$

$$2) \frac{1}{6(x+y)} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{x} = \frac{1}{6(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{x} = \frac{1 \cdot \cancel{(x+y)}^2}{6 \cancel{(x+y)} \cdot x} = \frac{x+y}{\underline{\underline{6x}}}.$$

Второй способ

Деление и умножение выполняется одновременно, числители и знаменатели всех дробей записываются одной дробью, затем раскладываются на множители.

$$\frac{x-y}{6y} : \frac{x^2-y^2}{y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{x} = \frac{(x-y) \cdot y \cdot (x+y)^2}{6y \cdot (x^2-y^2) \cdot x} = \frac{\cancel{(x-y)} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{(x+y)}^2}{6 \cancel{y} \cdot \cancel{(x-y)} \cdot \cancel{(x+y)} \cdot x} = \frac{x+y}{\underline{\underline{6x}}}.$$

Упростить выражения:

$$1. \frac{a+1}{7c} \cdot \frac{7+6c}{x} : \frac{3(a+1)}{x^2}$$

$$2. \frac{a^2-y^2}{c^2-d^2} \cdot \frac{c-d}{a-y} : \frac{y}{d+c}$$

$$3. \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 + \frac{3-m+15}{m(m+2)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Теория

Доказать тождество — это значит показать, что его обе части равны, т. е. его левая часть тождественно равна правой части для любых допустимых значений переменных.

Способы доказательства тождеств

Преобразование левой части — преобразовать выражение в левой части и получить выражение в правой части.

Преобразование правой части — преобразовать выражение в правой части и получить выражение в левой части.

Приведение к общему виду — преобразовать выражение в левой части, отдельно преобразовать выражение в правой части и получить одинаковые выражения.

Метод разности — преобразовать разность левой и правой частей и показать, что она равна нулю.

Пример:

доказать тождество $\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} = \frac{b}{a-b} - \frac{b^2-ab}{a^2-b^2}$.

Решение. Здесь лучше использовать третий способ.

Преобразуем выражение в левой части:

$$\begin{aligned}\frac{a+b(a+b)}{2(a-b)} - \frac{a-b(a-b)}{2(a+b)} &= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2(a-b)(a+b)} = \frac{(a^2+2ab+b^2) - (a^2-2ab+b^2)}{2(a-b)(a+b)} = \\ &= \frac{\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2}}{2(a-b)(a+b)} = \frac{4ab}{2(a^2-b^2)} = \frac{4 \cdot a \cdot b}{2 \cdot (a^2-b^2)} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.\end{aligned}$$

Преобразуем выражение в правой части:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a-b} - \frac{b^2-ab}{a^2-b^2} &= \frac{b(a+b)}{a-b} - \frac{b^2-ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{b^2-ab}{(a-b)(a+b)} = \\ &= \frac{b(a+b) - (b^2-ab)}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} + ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.\end{aligned}$$

Получили одинаковые выражения в левой и правой частях:

$$\frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Тождество доказано.

В доказательстве были применены формулы сокращённого умножения:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Обрати внимание!



Тождество справедливо лишь для допустимых значений переменных

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Уравнения, содержащие переменную в знаменателе, называются **дробно-рациональными**.

Алгоритм решения:

- Найти ОДЗ: все знаменатели не равны нулю.
- Привести все дроби к общему знаменателю.
- Приравнять числитель к нулю и решить полученное уравнение.
- Проверить, чтобы найденные корни не обращали знаменатель в ноль.

Упражнение № 1330 (1)

Решить уравнение:

$$4. \quad \frac{3x-1}{x+2} - \frac{7}{2+x} = \frac{7x^2-28}{x^2-4} + \frac{18}{2-x}$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком корня, называются **иррациональными**.

Основной метод решения: возведение обеих частей уравнения в натуральную степень.

Свойство: при возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение — следствие данного. При возведении в **чётную** степень могут появиться **посторонние корни**, поэтому **проверка обязательна**.

Упражнение № 152(1)

Решить уравнение:

$$\sqrt{x+1} = 3$$

Решение:

Находим ОДЗ: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

Возводим обе части в квадрат:

$$(\sqrt{x+1})^2 = 3^2 \Rightarrow x + 1 = 9 \Rightarrow x = 8$$

Проверка: $\sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$. Верно. ОДЗ выполняется.

Ответ: $x = 8$.

Упражнение 166 (1). Иррациональное неравенство

Задание: решить неравенство.

$$\sqrt{x} > 2$$

Решение:

$$\sqrt{x} > 2$$

$$\text{ОДЗ: } x \geq 0$$

$$(\sqrt{x})^2 > 2^2$$

$$x > 4$$

$$x \in (4; +\infty)$$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Показательная функция

Определение. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется **показательной функцией**.

Свойства:

Область определения: все действительные числа.

Множество значений: $y > 0$.

Если $a > 1$, функция возрастает.

Если $0 < a < 1$, функция убывает.

Показательные уравнения

Определение. Уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени, называются **показательными**.

Основной метод: сведение к уравнению $a^x = a^b$. Степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Упражнение 208(1)

Решить уравнение:

$$4^{x-1} = 1$$

Решение:

Представляем 1 как 4^0 :

$$4^{x-1} = 4^0$$

Приравниваем показатели:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

Показательные неравенства

Решение показательных неравенств основано на свойствах возрастания/убывания показательной функции:

Если $a > 1$, знак неравенства сохраняется.

Если $0 < a < 1$, знак неравенства меняется на противоположный.

Решить:

5. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 0$

6. $\frac{5x+4}{x-3} < 4$