

Законспектировать материал, выполнить задания.

Тема: Частные производные функции двух переменных. Понятие и примеры решений

Функцией двух переменных называется закон, по которому каждой паре значений *независимых переменных* x, y (аргументов) из *области определения* соответствует значение зависимой переменной z (функции).

Функция двух переменных обычно записывается как $z = f(x, y)$, при этом переменные x, y называются *независимыми переменными* или *аргументами*.

Пример1: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных.

Иногда используют запись $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются записи, где вместо буквы z используется буква u .

Пример 2

Найти частные производные первого порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Частных производных первого порядка две, так как две переменные независимы друг от друга.

Начнем с z'_x . **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом).**

Решаем:

$$\begin{aligned} z'_x &= (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x = 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x = \\ &= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 = 4xy^3 + 12x^3 \end{aligned}$$

Пояснения:

- (1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих **с подстрочным индексом**.
- (2) Используем правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$.
Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа.
- (3) Используем табличные производные $(C)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- (4) Упрощаем, получаем ответ.

Теперь находим z'_y . Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой (постоянным числом).

$$\begin{aligned} z'_y &= (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y = 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y = \\ &= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5 \end{aligned}$$

Обозначения производных первого порядка:

z'_x или $\frac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»

z'_y или $\frac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»

Обозначения производных второго порядка:

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – смешанная производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – смешанная производная «игрек по икс»

Выполняется следующее равенство:

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

В чём смысл частных производных?

По своей сути частные производные 1-го порядка напоминают «обычную» производную:

z'_x, z'_y – это функции, которые характеризуют *скорость* изменения функции $z = f(x, y)$ в направлении осей OX и OY соответственно.

Полный дифференциал первого порядка функции двух переменных имеет вид:
 $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Систематизируем элементарные правила дифференцирования сложной функции:

- 1) Когда мы дифференцируем по x , то переменная y считается константой.
- 2) Когда же дифференцирование осуществляется по y , то константой считается x .
- 3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной x или y , либо какой-нибудь другой переменной, по которой ведется дифференцирование.

Задание:

Для функции $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ записать полный дифференциал первого порядка и найти производные второго порядка.