Иррациональные уравнения и неравенства

1. Что это такое?

Иррациональное уравнение (неравенство) — это уравнение (неравенство), в котором переменная находится под знаком корня (радикала).

Примеры:

- $\sqrt{x}=3$
- $\sqrt{x+2}=x$
- $\sqrt{2x-1}>x-2$

Главное правило: Корень чётной степени (квадратный, 4-й и т.д.) существует только тогда, когда **подкоренное выражение ≥0**. Сам корень чётной степени тоже **всегда ≥0**.

2. Иррациональные уравнения

Основной метод: Возведение в квадрат

Чтобы избавиться от корня, нужно возвести обе части уравнения в ту же степень.

 Важно: Возведение в чётную степень — операция **неравносильная**. Она может привести к появлению **посторонних корней**. Поэтому проверка обязательна!

Алгоритм решения (простой случай) $f(x)=g(x)$

1. **ОДЗ (Область допустимых значений):** $f(x)\geq 0$.
2. **Ограничение на правую часть:** $g(x)\geq 0$ (так как корень не может быть равен отрицательному числу).
3. **Возводим в квадрат:** $f(x)=g(x)^2$.
4. **Решаем** полученное уравнение.
5. **Проверяем** корни (подставляем в исходное уравнение или в ОДЗ + условие $g(x)\geq 0$).

Краткая запись системы:

$$\sqrt{f(x)}=\mathrm{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)=g(x)^2 \end{cases}$$

(На практике обычно проверяют только условие $g(x)\geq 0$, так как если оно выполнено и равенство $f=g^2$ верно, то $f\geq 0$ автоматически).

Пример $\sqrt{x+2}=x$

1. Ограничение: $x\geq 0$.
2. Квадрат: $x+2=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0$.
3. Корни: $x_1=2$, $x_2=-1$.
4. Проверка: $x=-1$ не подходит ($x\geq 0$). $x=2$ подходит. **Ответ:** 2.

Если корней несколько

Если уравнение вида $f+g=h$ или $f=g+h$, то:

1. Уединяем один корень.
2. Возводим в квадрат.
3. Повторяем, пока не избавимся от всех корней.

Разбор метода «Уединение корня»

Этот метод применяется, когда в уравнении **два (или больше) корня**, и просто возвести всё в квадрат нельзя — от этого корни не исчезнут, а только усложнятся.

Что значит «уединить корень»?

Уединить корень — значит оставить **один корень в одной стороне уравнения**, а всё остальное перенести в другую сторону.

Пример: почему нельзя просто возвести в квадрат?

Возьмём уравнение:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$$

Если возвести обе части в квадрат, получим:

$$(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})^2=25$$
$$(x+3)+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-2}+(x-2)=25$$
$$2x+1+2\sqrt{(x+3)(x-2)}=25$$

Как видите, **корень никуда не делся**, он даже стал сложнее. Поэтому так делать нельзя.

3. Иррациональные неравенства

Здесь всё сложнее. Знак неравенства диктует свои правила.

Случай А: Корень меньше числа (или выражения)

$f(x)<g(x)$

Корень неотрицателен. Чтобы он был **меньше** $g(x)$, нужно чтобы $g(x)$ была **строго больше** нуля

Система:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x)^2 \end{cases}$$

Случай Б: Корень больше числа (или выражения)

$f(x)>g(x)$

Здесь два варианта:

1. $g(x)<0$: Корень (число ≥ 0) всегда больше отрицательного числа. Достаточно ОДЗ.
2. $g(x)\geq 0$: Можно возводить в квадрат.
   Совокупность (объединение) систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Случай В: Сравнение двух корней $f(x)<g(x)$

Просто возводим в квадрат, не забывая про ОДЗ для обоих корней:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

(Для знака >> логика та же, меняется только последнее неравенство).

4. Шпаргалка-памятка

Ситуация	Что делать?	Главное правило
Уравнение $\sqrt{f}=g$	Возвести в квадрат	Проверить, что $g\geq 0$
Неравенство $\sqrt{f}<g$	Возвести в	Требовать $g>0$

	квадрат	
Неравенство $\sqrt{f}>g$	Разбить на 2 случая	Если $g<0$ — решаем только ОДЗ. Если $g\geq 0$ — возводим в квадрат
Любая задача	Начать с ОДЗ	Подкоренное выражение ≥ 0

5. Частые ошибки

1. **Забыли проверить корни** после возведения в квадрат (появились лишние).
2. **Не учли знак правой части** в неравенствах (например, возвели в квадрат $\sqrt{x}>-5$, хотя это верно при любом $x\geq 0$).
3. **Потеряли ОДЗ** — например, в уравнении $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}=0$ нельзя просто приравнять каждый множитель к нулю без учета того, что оба корня должны существовать.

   Совет: Всегда начинай решение с выписывания условий на подкоренные выражения. Это спасает от 90% ошибок.