

## Тема: Максимумы и минимумы функций от нескольких переменных.

### Определения

**Точка**  $M_0(x_0, y_0)$  называется **точкой максимума** функции  $z=f(x, y)$ , если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек  $(x, y)$  из этой окрестности, отличных от  $M_0$ , выполняется неравенство  $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ . Аналогично, точка  $M_0$  — **точка минимума**, если для всех таких точек выполняется  $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ .

**Значение функции в точке максимума** (или минимума) называется **максимумом** (или **минимумом**) функции.

### Необходимое условие экстремума

Если функция  $z=f(x, y)$  имеет экстремум в точке  $M_0$ , то в этой точке **частные производные первого порядка либо равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует**. Точки, где частные производные равны нулю (или не существуют), называются **критическими**.

### Алгоритм исследования на экстремум

Чтобы найти экстремумы, обычно действуют по такому плану:

1. **Найти частные производные первого порядка**  $\partial z / \partial x$  и  $\partial z / \partial y$ .
2. **Решить систему уравнений**  $\partial z / \partial x = 0$ ,  $\partial z / \partial y = 0$ , чтобы найти критические точки.
3. **Найти частные производные второго порядка**  $\partial^2 z / \partial x^2$ ,  $\partial^2 z / \partial y^2$ ,  $\partial^2 z / \partial x \partial y$ .
4. **Вычислить значения этих производных второго порядка** в каждой из критических точек.
5. **Сделать вывод о наличии экстремумов, используя критерий Сильвестра.** Обозначим  $A = \partial^2 z / \partial x^2$ ,  $B = \partial^2 z / \partial x \partial y$ ,  $C = \partial^2 z / \partial y^2$ . Тогда:
  - Если  $AC - B^2 > 0$  и  $A < 0$ , то в точке **максимум**.
  - Если  $AC - B^2 > 0$  и  $A > 0$ , то в точке **минимум**.
  - Если  $AC - B^2 < 0$ , то **экстремума нет** (это **седловая точка**).
  - Если  $AC - B^2 = 0$ , то **критерий не даёт ответа**, и нужно использовать другие методы.

### Пример.

Найти экстремум функции  $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ .

**Решение.** 1) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3$$

Чтобы найти стационарные (критические) точки, составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Таким образом, получаем две стационарные точки  $M_1(6; 3)$  и  $M_2(0; 0)$ .

2) Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y - 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2.$$

3) Исследуем характер каждой стационарной точки.

а) В точке имеем

$$A = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x^2} = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 6 = -18, \quad B = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x \partial y} = 6 \cdot 6 = 36, \quad C = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial y^2} = -12 \cdot 3^2 = -108$$

$$\text{Тогда } \Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648 > 0$$

Так как  $A = -18 < 0$ , то в точке  $M_1$  функция имеет локальный максимум.

$$z_{\max} = z(6; 3) = 3 \cdot 6^2 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27.$$

б) В точке имеем

$$A = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x^2} = 0, \quad B = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial y^2} = 0$$

Тогда .

Проведем дополнительное исследование. Значение функции в точке  $M_2$  равно нулю, т.е.  $z(0; 0) = 0$ . Можно заметить,

что  $z = -y^4 < 0$  при  $x = 0, y \neq 0$ ;  $z = -x^3 > 0$  при  $x < 0, y = 0$ . Значит, в окрестности точки функция принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке функция экстремума не имеет.

Пример 2.

Исследовать на экстремум функцию  $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ .

### Решение

■ Найдем  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y$ .

■ Критические точки:  $\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow M_0(0, 0), M_1(-1, -1), M_2(1, 1).$

■ Найдем  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$ .

Дорешать пример самостоятельно