Лекция 14.4 Формулы приведения

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Формулы приведения — формулы, позволяющие выразить тригонометрические функции углов вида **90° ± α, 180° ± α, 270° ± α, 360° – α** через функции **острого угла α**.

Цель: свести вычисление функции любого угла к табличному значению (0°–90°).

Как определить знак:

1. Считаем α острым (0° < α < 90°)
2. Смотрим, в какой четверти окажется угол
3. Берём знак **исходной** функции в этой четверти

- I — все +
- II — только **С**инус +
- III — только **Т**ангенс и котангенс +
- IV — только **К**осинус +

Таблица формул

α	90° – α	90° + α	180° – α	180° + α	270° – α	270° + α	360° – α
sin	cos α	cos α	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α
cos	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α	sin α	cos α
tan	cot α	–cot α	–tan α	tan α	cot α	–cot α	–tan α
cot	tan α	–tan α	–cot α	cot α	tan α	–tan α	–cot α

Пример 1. $\sin 150°$

1. $150° = 180° - 30°$
2. **180° — горизонталь → не меняется →** $\sin$
3. **150° — II четверть, sin +**
4. $\sin 150° = +\sin 30° = \frac{1}{2}$

Пример 2. $\cos 120°$

1. $120° = 90° + 30°$
2. **90° — вертикаль → меняется →** $\cos \to \sin$
3. **120° — II четверть, cos –**
4. $\cos 120° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

Пример 3. $\tan 225°$

1. $225° = 180° + 45°$
2. **180° — горизонталь → не меняется →** $\tan$
3. **225° — III четверть, tan +**
4. $\tan 225° = +\tan 45° = 1$

Пример 4. $\sin 300°$

1. $300° = 270° + 30°$
2. **270° — вертикаль → меняется →** $\sin \to \cos$
3. **300° — IV четверть, sin –**
4. $\sin 300° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Пример 5. $\cos 330°$

1. $330° = 360° - 30°$
2. **360° — горизонталь → не меняется →** $\cos$
3. **330° — IV четверть, cos +**
4. $\cos 330° = +\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Пример 6. $\cot 135°$

1. $135° = 90° + 45°$
2. **90° — вертикаль → меняется →** $\cot \to \tan$
3. **135° — II четверть, cot –**
4. $\cot 135° = -\tan 45° = -1$

ФОРМУЛЫ ЧЁТНОСТИ (для отрицательных углов)

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Пример: $\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

АЛГОРИТМ (памятка)

```
1. Записать угол в виде 90°±α, 180°±α,
270°±α, 360°−α
          |
2. Вертикаль (90°, 270°) → меняем функцию
   Горизонталь (180°, 360°) → не меняем
          |
3. Определить четверть → знак исходной
функции
          |
4. Записать ответ
```

Лекция 14.5 Тема: Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

1.1. Что такое формулы сложения?

Формулы сложения — это формулы, выражающие тригонометрические функции суммы или разности двух углов через тригонометрические функции самих углов.

1.2. Зачем нужны формулы сложения?

- Вычисление функций «нестандартных» углов (например, 75° = 45° + 30°)
- Упрощение тригонометрических выражений
- Доказательство тождеств
- Решение уравнений

2. КОСИНУС СУММЫ И РАЗНОСТИ

2.1. Формула косинуса разности

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Схема:

```
cos(α − β) = cos α · cos β + sin α · sin β
             └──────┘   └──────┘
             косинусы   синусы
```

«Косинус разности = косинус-косинус ПЛЮС синус-синус»

2.2. Формула косинуса суммы

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Схема:

```
cos(α + β) = cos α · cos β − sin α · sin β
             └──────┘   └──────┘
             косинусы   синусы
```

«Косинус суммы = косинус-косинус МИНУС синус-синус»

Пример 1. Вычислить $\cos 75°$.

Решение:

1. Представим: $75° = 45° + 30°$
2. Используем формулу косинуса суммы: $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30°$
3. Подставляем значения: $= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Пример 2. Вычислить $\cos 15°$.

Решение:

1. Представим: $15° = 45° - 30°$
2. Используем формулу косинуса разности: $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°$
3. Подставляем: $= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Пример 3. Упростить $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

Решение:

1. **Раскроем первую скобку:**
   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
2. **Раскроем вторую скобку:**
   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
3. **Складываем:**
   $(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$
4. **Приводим подобные:**
   $=2\cos\alpha\cos\beta$

Ответ: $2\cos\alpha\cos\beta$

3. СИНУС СУММЫ И РАЗНОСТИ

3.1. Формула синуса суммы

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

Схема:

```
sin(α + β) = sin α · cos β + cos α · sin β
                  └──┬──┘   └──┬──┘
                синус-косинус + косинус-
синус

    «Синус суммы = синус-косинус ПЛЮС
косинус-синус»
```

3.2. Формула синуса разности

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

Схема:

```
sin(α − β) = sin α · cos β − cos α · sin β
                  └──┬──┘   └──┬──┘
                синус-косинус − косинус-
синус

    «Синус разности = синус-косинус МИНУС
косинус-синус»
```

3.4. Примеры

Пример 4. Вычислить $\sin 75°$.

Решение:

1. $75°=45°+30°$
2. **Формула синуса суммы:**
   $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$
3. **Подставляем:**
   $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$
   $=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Пример 5. Вычислить $\sin 15°$.

Решение:

1. $15°=45°-30°$
2. **Формула синуса разности:**
   $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$
3. **Подставляем:**
   $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$
   $=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Пример 6. Упростить $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$.

Решение:

1. **Раскроем первую скобку:**
   $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. **Раскроем вторую скобку:**
   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. **Складываем:**
   $(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$
4. **Приводим подобные:**
   $=2\sin\alpha\cos\beta$

Ответ: $2\sin\alpha\cos\beta$

Задача 1

Условие: Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, α — I четверть, β — II четверть.

Решение:

1. Найдём $\cos\alpha$: α — I четверть → $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$
2. Найдём $\sin\beta$: β — II четверть → $\sin\beta=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$
3. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{33}{65}$

Ответ: $\frac{33}{65}$

Задача 2

Условие: Вычислить $\cos 15^\circ\cos 45^\circ+\sin 15^\circ\sin 45^\circ$.

Решение:

1. Сравним с формулой: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
2. Здесь $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$
3. Получаем: $\cos(15^\circ-45^\circ)=\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задача 3

Условие: Упростить $\frac{\tan 40^\circ+\tan 20^\circ}{1-\tan 40^\circ\tan 20^\circ}$.

Решение:

1. Сравним с формулой: $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
2. Здесь $\alpha=40^\circ$, $\beta=20^\circ$
3. Получаем: $\tan(40^\circ+20^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$